ANNEE 2002

CONCOURS D'ADMISSION

A

L'ECOLE DE L'AIR

CONCOURS PC/PSI

COMPOSITION
DE
MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures
Coefficient : 13

L'attention des candidats est attirée sur le fait que la notation tiendra compte du soin et de la rigueur apportés dans le travail.

Nota : Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

T.S.V.P.

CONCOURS
ECOLE DE L'AIR 2002

EPREUVE DE MATHEMATIQUES PC-PSI

ERRATUM

PROBLEME II - Page 4 / 4

au lieu de $g(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x_n$

Lire $g(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$

Le sujet est constitué de deux problèmes indépendants.

Problème I

On fixe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et l'on désigne par E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur où égal à n.
On considère la forme linéaire L sur E définie par :

$$\forall P \in E, L(P) = \int_{-1}^{1} P(x)dx$$

On notera $\mathcal{B} = (1, X, X^2, .., X^n)$ la base canonique de E.
Les questions sont dans une large mesure indépendantes.

1. (a) Déterminer l'image par L du polynôme P tel que $P = \sum_{p=0}^{n} a_p X^p$.

   (b) Déterminer la dimension du noyau de L, puis une base $\mathcal{B}'$ de ce noyau.

2. Pour tout réel λ , on considère l'application f_λ de E dans lui même définie par:

$$f_\lambda(P) = P + \lambda L(P)X$$

   (a) Montrer que f_λ est linéaire et préciser la matrice de f_λ dans la base canonique de E.

   (b) Déterminer les valeurs propres de f_λ ainsi que le rang de f_λ. f_λ est-il diagonalisable ?

   (c) Démontrer que l'ensemble $\{f_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}\}$ constitue un groupe pour la loi o , isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$.

3. Plus généralement on considère un polynôme $P_0 \in E$ et g_λ l'endomorphisme de E défini par:

$$g_\lambda(P) = P + \lambda L(P)P_0$$

   On suppose que $P_0 \notin \ker(L)$;

   (a) Déterminer les valeurs propres et le rang de g_λ . On discutera selon les valeurs de λ (On pourra par exemple former la matrice de g_λ dans une base adaptée).

   (b) Montrer qu'il existe une valeur de λ autre que 0 pour laquelle g_λ est une projection. Préciser les éléments caractéristiques de celle ci.

4. On reprend les notations de 3°et on suppose que $P_0 \in \ker(L)$.

   (a) Déterminer les valeurs propres et le rang de g_λ. g_λ est- il diagonalisable ?

   (b) Dans le cas où g_λ est bijective , déterminer $(g_\lambda)^{-1}(P)$.

Dans les deux questions suivantes, l'espace E est muni du produit scalaire

$$(P \mid Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$$

La norme associée sera notée $\|.\|$.

5. *Dans cette question , on considère un polynôme fixé* $P_0 \in E$, $P_0 \notin \ker(L)$, *et les polynômes* Q_λ *de la forme* $Q_\lambda = P_0 - \lambda X$, *où* λ *parcourt* $\mathbb{R}$.
Déterminer

$$a = \inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \left(\int_{-1}^{1} Q_\lambda^2(t)dt \right)$$

en fonction de $\|P_0\|$ et de $(P_0 \mid X)$.

6. *Dans cette question ,* $\lambda \in \mathbb{R}$. *On considère l'application* g_λ,*étudiée dans la question 3, avec* $P_0 = 1$. g_λ *est donc définie par* $\forall P \in E, g_\lambda(P) = P + \lambda L(P)$.
Lorsque celle-ci existe ,on rappelle la définition de la norme subordonnée de l'application linéaire g_λ*:*

$$|||g_\lambda||| = \sup_{P \neq 0} \left(\frac{\|g_\lambda(P)\|}{\|P\|} \right)$$

   (a) Montrer que $|||g_\lambda|||$ existe, et que $|||g_\lambda||| \leq 1 + 2\,|\lambda|$.

   (b) Déterminer $|||g_\lambda|||$ dans les trois cas suivants: $\lambda \geq 0$, $\lambda \in]-1, 0[$, $\lambda \leq -1$.

Problème II

La fonction "polylog" est définie pour tout réel x *et tout réel* s *pour lesquels la série suivante converge par :*

$$polylog\,(s, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^s} = P(s, x)$$

1. s étant fixé, quel est le rayon de convergence de la série entière $P(s, x)$?
2. Quel est selon les valeurs de s l'ensemble D_s de définition de la fonction $x \mapsto P(s, x)$?
3. Déterminer : $P(0, x), P(1, x)$ en fonction de x.
4. On suppose connue la fonction $x \mapsto P(s, x)$. Déterminer la fonction $P(s-1, x)$ pour $x \in \overset{o}{D}_{s-1}$ (*intérieur de* D_{s-1}). En déduire $P(-1, x)$, puis $P(-2, x)$.

On admet pour la suite du problème la propriété (Propriété 1) suivante :

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *une série entière de rayon de convergence égal à* 1, *telle que* $a_n > 0$ *et* $\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$. *Soit d'autre part* b_n *une autre suite telle que :* $b_n \underset{n \to \infty}{\sim} a_n$ *et* $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x_n$.

$$\textit{Alors } f(x) \underset{x \to 1}{\sim} g(x).$$

5. (a) Déterminer un équivalent simple de $P(s,x)$ pour $x \to 1^-$ lorsque $s = 0, \quad s = -1, s = -2$.

   (b) En remarquant que $n^p \underset{n \to +\infty}{\sim} n(n-1)....(n-p+1)$, déterminer un équivalent simple de $P(-p,x)$ lorsque $p \in \mathbb{N}$.

6. Soit γ un réel , $\gamma < 0$. Développer la fonction $x \mapsto (1-x)^\gamma$ en série entière au voisinage de 0 sous la forme:

$$(1-x)^\gamma = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

   Montrer de plus que $a_n > 0$.

7. Soit $\delta \in \mathbb{R}$. On pose $v_n = \dfrac{a_n}{n^\delta}$ et $u_n = \ln(\dfrac{v_{n+1}}{v_n})$, où a_n est défini à la question précédente .

   (a) Etudier selon les valeurs de δ la nature de la série de terme général u_n.

   (b) En déduire qu'il existe deux réels $\beta > 0$, $\delta \in \mathbb{R}$ tels que $a_n \underset{n \to \infty}{\sim} \beta n^\delta$. On précisera δ.

8. En déduire, pour tout réel $s < 1$, l'existence d'un réel $\lambda(s)$ tel que:

$$P(s,x) \underset{x \to 1^-}{\sim} \lambda(s)(1-x)^{s-1}$$

   et préciser $\lambda(-p)$ lorsque $p \in \mathbb{N}$.